Úloha 1.

Turnaje se účastní Brazílie, Česko, Čína, Německo a Švédsko, hraje se systémem každý s každým. Na závěr první dva týmy sehrají finálový zápas.

Kolik je možných finálových dvojic (vítěz, poražený finalista), ve kterých je

(a) vítězem Česko?

(b) vítězem Německo?

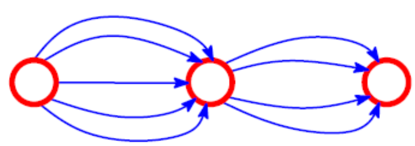
(c) vítězem libovolný tým a poraženým finalistou libovolný jiný tým?

(d) Čína poraženým finalistou?

Následující úloha se skládá z několika podúloh. Rozdělte podúlohy do několika skupin (může to být i jen jediná skupina) tak, že všechny podúlohy v jedné skupině mají stejný výsledek. Výsledek podúloh v rámci skupiny není nutné určit a **není podstatný**. *Hledejte důvody pro svá rozhodnutí.*

Úloha 2.

(a) Určete počet různých cest ze západního města do východního.



(b) Na základní škole je v rámci 1. stupně pět ročníků. V každém z nich jsou čtyři třídy označeny písmeny A, B, C, D. Kolik tříd je na 1. stupni?

(c) Na večírku se sešlo 5 lidí. Každý z nich si přiťukl (přesně jednou) se všemi ostatními. Kolik ťuknutí proběhlo?

(d) Kolika způsoby lze ze 4 děvčat a 5 chlapců vybrat taneční pár?

(e) Ve skupině florbalového turnaje se potkalo 5 týmů. Každý sehrál s každým jedno utkání. Kolik zápasů se celkově hrálo?

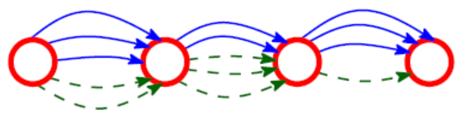
Úloha 3.

Určete počet cest ze západního města do východního, v nichž

(a) jsou použité linky stejného typu.

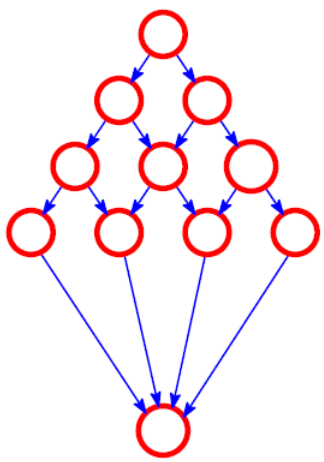
(b) se typy linek střídají.

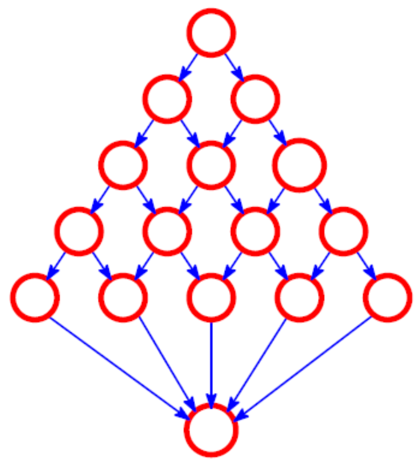
(c) je přesně jedna linka čárkovaně.



Úloha 4.

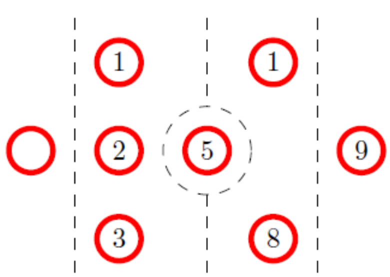
Pro každé město určete, kolika způsoby se do něj lze dopravit ze severního města. Čísla vepisujte do kroužků.

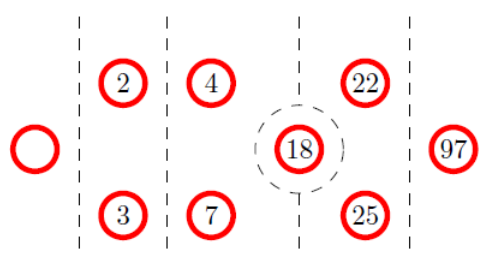




Úloha 5.

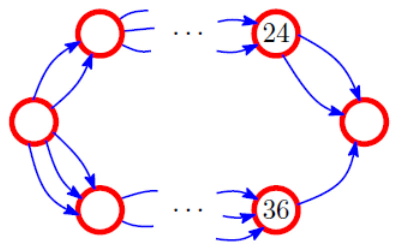
Čísla v kroužcích značí, kolika různými způsoby se do daného města lze dostat z toho nejzápadnějšího. Doplňte linky tak, že každá z nich směřuje ze západu na východ a protíná přesně jednu přerušovanou čáru.





Úloha 6.

Určete počet cest ze západního města do východního. Čísla v kroužcích mají význam z předchozí úlohy.



Úloha 7.

Turnaje se účastní Brazílie, Česko, Čína, Německo a Švédsko. Kolik je možných medailových trojic, ve kterých je

(a) vítězem Švédsko?

(b) vítězem Čína?

(c) vítězem libovolný tým, stříbrným medailistou libovolný jiný tým a bronzovým medailistou kterýkoliv ze zbývajících týmů?

(d) Brazílie bronzovým medailistou?

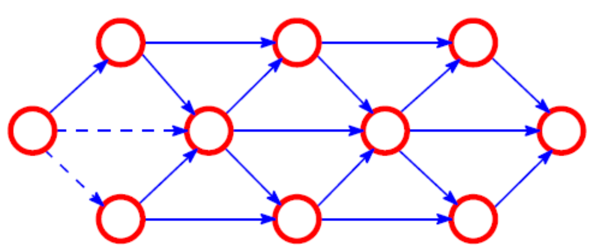
(e) Česko stříbrným medailistou?

Úloha 8.

(a) Rozhodněte, kterou z linek vyznačených přerušovanou šipkou máme zrušit, aby se počet cest ze západu na východ snížil méně.

(b) Pro každé z měst určete, kolik do něj vede různých cest z města nejzápadnějšího (bez rušení jediné linky).

(c) Pokud jste počítali správně, vyšla vám v prostředním řádku tři prvočísla. Rozhodněte, zda by vycházela prvočísla i dále, pokud bychom soustavu linek prodloužili ve stejném duchu.



Shrnutí: V mnoha úlohách se počty možností násobí a sčítají. Například pokud z města A do B vede 7 linek a z města B do C vede 5 linek, tak z města A do C vede $7 \cdot 5$ cest. Když ještě z C do D vede 9 linek, tak z A do D vede celkem $7 \cdot 5 \cdot 9$ cest.

Násobení se děje, kdykoliv můžeme prvky z jedné skupiny bez omezení kombinovat s prvky z druhé skupiny.

Matematicky se tato skutečnost vyjadřuje pomocí množin a uspořádaných dvojic. Řekněme, že množina A má a prvků a množina B má b prvků. Počet uspořádaných dvojic, v nichž na prvním místě je prvek z množiny A a na druhém místě prvek z množiny B, je $a \cdot b$. Právě jsme popsali *kombinatorické pravidlo součinu.*

Obecně: Mějme ne dvě, ale rovnou k množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Počty jejich prvků označme $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Uvažujme uspořádané k-tice, v nichž na prvním místě je prvek z množiny M_1, na druhém místě prvek z množiny M_2, atd. až na k-tém místě je prvek z množiny M_k. Počet těchto uspořádaných k-tic je $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$.

Předpokládejme, že nějakou skupinu lze rozdělit na 2 zcela nezávislé menší skupiny. Počty prvků menších skupin dají dohromady přirozeně počet prvků původní skupiny. Například v úloze 6 vede do východního města $24 \cdot 2$ „horních“ cest a 36 „dolních“ cest. To dává $24 \cdot 2 + 36$ cest. Podobně v úloze 3 (c) jsme cesty rozdělili dokonce do tří skupin - skupina cest začínajících čárkovanou linkou, skupina cest s prostřední čárkovanou linkou a skupina cest končících čárkovanou linkou.

V matematice situaci popíšeme opět pomocí množin. Dvě menší skupiny reprezentujeme pomocí množin A a B, jejichž počty prvků jsou a a b. To, že jsou „nezávislé“, znamená, že neobsahují žádné společné prvky, tj. $A \cap B = \emptyset$ (takovým množinám říkáme „disjunktní“). Tyto množiny vytváří dohromady množinu $A \cup B$, jejíž počet prvků je $a + b$. Tomuto říkáme *kombinatorické pravidlo součtu.*

Obecně: Mějme množinu, kterou lze rozdělit na k disjuktních podmnožin $M_1, M_2, \ldots, M_k$, jejichž počet prvků je $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Uvažujeme tedy množinu $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$, kde pro libovolné indexy i, j platí $M_i \cap M_j = \emptyset$. Počet prvků množiny $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$ je $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.