



Úloha 1.

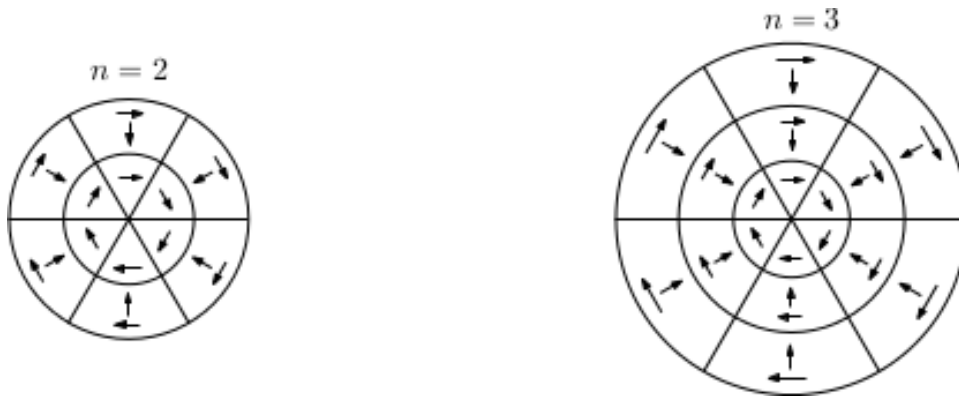
Na stole je hromádka n sirek a dva hráči s nimi hrají hru. Hráč na tahu musí odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Určete, který z hráčů (začínající či ten druhý) má vyhrávající strategii (tj. umí si zajistit výhru bez ohledu na tahy soupeře). Řešte pro

- (a) $n = 6$.
- (b) $n = 8$.
- (c) $n = 10$.
- (d) $n = 2014$.



Úloha 2.

Dva hráči hrají hru na plánu s n soustřednými kružnicemi (jako na obrázcích). Střídavě vybarvují po jednom políčku. V prvním tahu se vybarví jedno z nejvíce vnějších políček. V každém dalším tahu se musí vybarvit políčko, které sousedí s posledně vybarveným ve směru jedné z šipek. Každé políčko lze vybarvit pouze jednou. Kdo nemůže táhnout, prohrál.



Pro hodnoty

- (a) $n = 2$.
- (b) $n = 3$.
- (c) $n = 5$.
- (d) $n = 2014$.

odpovězte na následující otázky:

1. Který z hráčů má vyhrávající strategii?
2. Kolik má hra tahů v případě, že oba hráči hrají bez chyb (tj. tak, aby co nejrychleji vyhráli či alespoň co nejvíce oddálili prohru)?

3. Kolik je možných průběhů celé hry? Dva průběhy jsou různé, pokud se liší v alespoň jednom tahu.

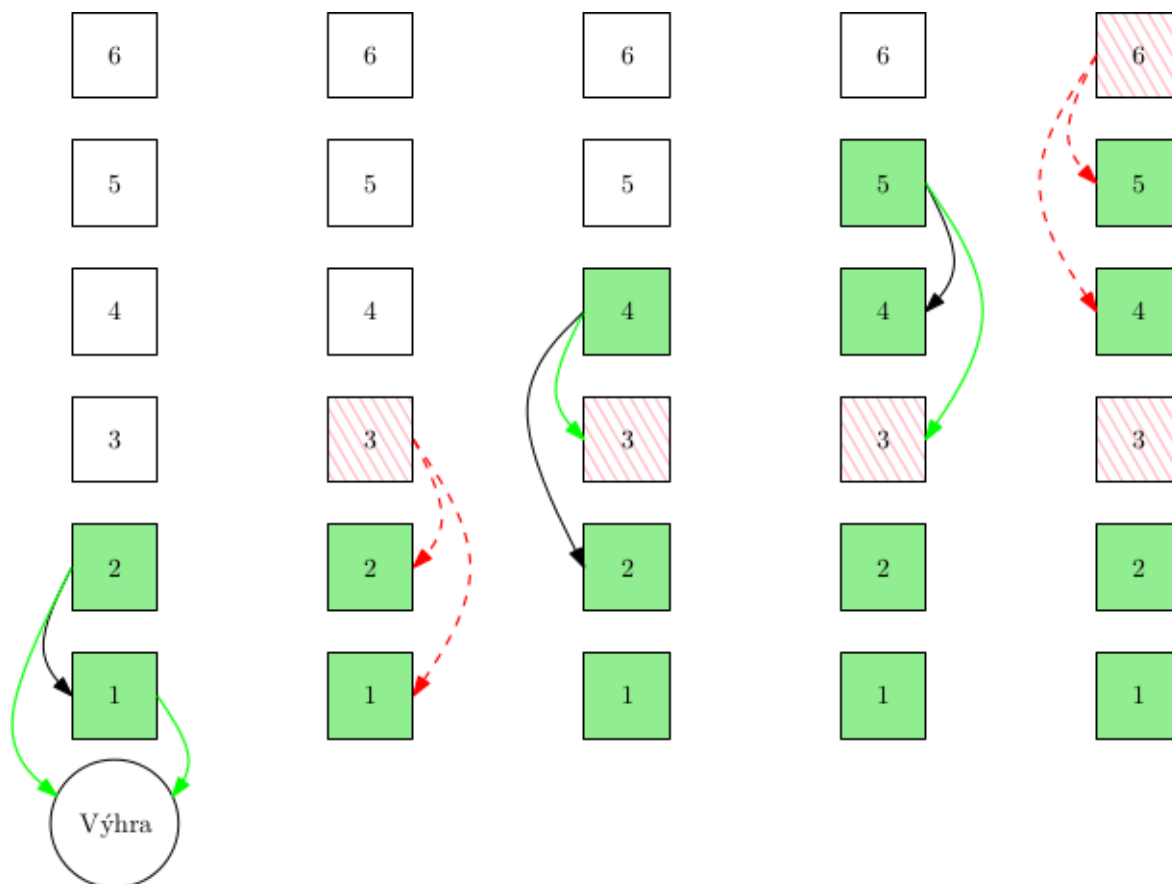


Úloha 3.

Dva hráči opět hrají hru se sirkami. Tentokrát je na stole 15 serek a hráč, který je na tahu si může vybrat, zda odebere 2, 3, nebo 4 sirky. Kdo nemá jak táhnout, prohrál. Rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii.

Shrnutí: (V a P pozice) Všechny hry z této hodiny a mnoho dalších lze rozřešit stejným způsobem. Pozice, v nichž táhnoucí hráč nemůže uniknout prohře, nazveme **P pozice** a naopak pozice, v nichž si umí zajistit bez ohledu na tahy protihráče výhru, nazveme **V pozice**.

Jak určíme, zda je počáteční pozice V nebo P? Jednoduše! V a P pozice lze vždy určovat „odspodu“ jako v následujícím obrázku pro první úlohu. V pozice jsou znázorněny zeleně (plnou barvou), P pozice červeně (šrafovaně).



Pro zajímavost uvedme, že v principu lze tímto způsobem určit, zda je počáteční pozice v šachu vyhrávající či prohrávající. Větvení možností v šachu je ale natolik široké, že i pro nejrychlejší superpočítače je výpočet časově neúnosný. V roce 2012 se nicméně podařilo dokončit výpočet, který u každé šachové pozice se sedmi a méně figurami rozhodl, zda je V či P.