

Úloha 1.

Následuje pět různých řešení té samé úlohy. Rozhodněte, je-li nějaké z nich správně a určete, v čem přesně jsou ostatní řešení špatně (např. která možnost je započítaná víckrát).

ÚLOHA. Kolika způsoby lze rozdělit šest studentů do dvojic?

ŘEŠENÍ 1: Z šestice studentů vybereme dvojici. To lze $\binom{6}{2}$ způsoby. Ze zbylých čtyřech studentů vybereme další dvojici jedním z $\binom{4}{2}$ způsobů. Třetí dvojice je tím určena jednoznačně. To je celkem $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 90$ možností.

ŘEŠENÍ 2: Zkoušením zjistíme, že čtveřici studentů lze do dvojic rozdělit třemi způsoby. Nejprve tedy vybereme čtveřici studentů jedním z $\binom{6}{4}$ způsobů a v rámci této čtveřice určíme rozdělení do dvojic jedním ze tří způsobů. Třetí dvojice je pak určena jednoznačně. Celkem je možností $\binom{6}{4} \cdot 3 = 45$.

ŘEŠENÍ 3: Z šestice studentů vybereme trojici. To lze $\binom{6}{3} = 20$ způsoby. Ta nám určí trojici zbývajících studentů. Pak máme $3 \cdot 3$ možností, jak spárovat studenty z první trojice s těmi z trojice druhé. Výsledek je $20 \cdot 9 = 180$.

ŘEŠENÍ 4: Studenty označíme písmeny A, B, C, D, E a F. Student A může být ve dvojici s kýmkoliv jiným, má tedy pět možností. Po určení první dvojice zbývají čtyři studenti. Vezmeme jednoho z nich a na výběr k němu do dvojice máme ze tří zbylých studentů. Do třetí dvojice dáme zbylé dva studenty. Možností je tedy $3 \cdot 5 = 15$.

ŘEŠENÍ 5: Studenty seřadíme do řady jedním z $6!$ způsobů. Do dvojic pak dáme prvního s druhým, třetího s čtvrtým a pátého s šestým. Každé rozdělení do dvojic získáme tímto více způsoby. Například dvojice (1, 2), (3, 4) a (5, 6) získáme i z každé šestice, v níž tyto dvojice změni pořadí. (např. (34)(12)(56), (12)(56)(34), ...). Dvojice jsou tři a tedy počet jejich pořadí je $3! = 6$. Každé rozdělení do trojic jsme takto započítali šestkrát, takže dohromady je možností $6!/6 = 120$.

Úloha 2.

Kolika způsoby lze 12 studentů rozdělit do tří čtyřčlenných týmů?